

Lecture - 11 - Diskrete systemer

19. november 2024 12:13

Indholdsfortegnelse

1. Indledende noter
2. D'Lamberts princip
 - Definition
 - Eksempel
 - Introduktion af fleksibilitetskoefficient
3. Statisk bjælketeori (Euler-Bernoulli)
 - Antagelse
 - Kinematiske, mekaniske og konstitutive relationer
 - Ligevægtsligninger
 - Eksempler
4. Sammenfattende eksempel
5. Note vedrørende opgave 9.1 d.

Indledende noter

De systemer vi analyserer, er kontinuerte. (kontinuert $n = \infty$)

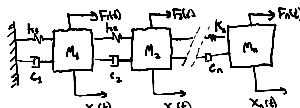
Vi får en bevægelsesligning er der er givet på formen

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (1.1)$$

Med $M, C, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), F(t) \in \mathbb{R}^n$

Diskuterer af sådan et system kan realiseres ved brug af simple mekaniske komponenter og/eller via. Konventionelle numeriske metoder. (mest anvendte indenfor vibration er elementmetoden)

Ved brug af de simple mekaniske komponenter fås masse-fjeder-dæmper systemer. Illustreret:



Hvorledes etableres K, M, F ud fra det underliggende kontinuum?

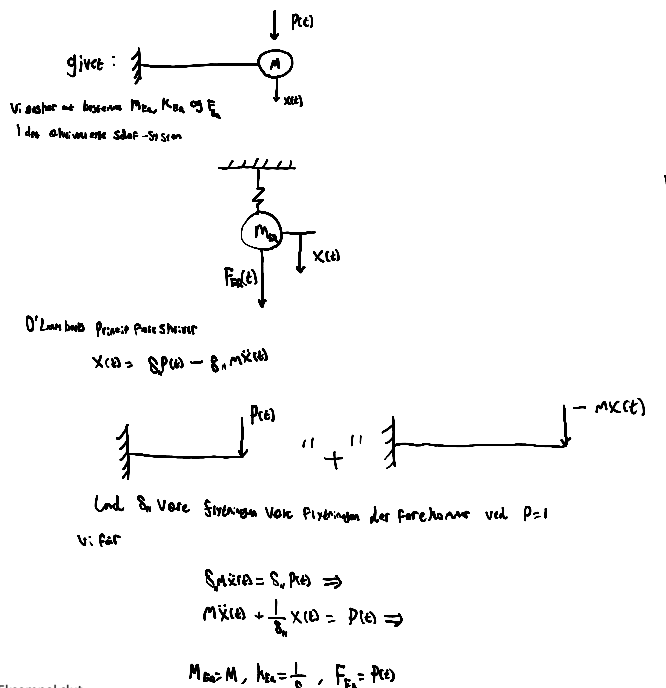
2. D'Lamberts princip (Se note)

Definition 2.1: D'Lamberts princip foreskriver at system (1.1) omskrives til

$$0 = F(t) - M\ddot{x}(t) - C\dot{x}(t) - Kx(t)$$

Hvordan systemet behandles statisk (til hvert t) med $M\ddot{x}(t)$ værende en ekstern (virtuel) lastvektor (vi tillader altså at betragte ledet som en ekstern last, hvilket jo ikke er helt rigtigt, derfor virtuel). Så vi har altså en masse kræfter som summeret giver 0, altså et statisk system.

Eksempel 2.1:



Eksempel slut

Definition 2.2: Fleksibilitetskoefficienten δ_{ij} angiver "flytningen"/"drejningen" i DOF j foranledigt af en enhedslast virkende i DOF i
 i = frihedsgrad hvilken flytning/drejning det drejer sig om
 j = frihedsgrad der lasten virker

NOTE: ANVENDELSE AF d'alamberts princip

Når man bruger DAB skal man opstille ligningen:

$$x(t) = F(t) - M\ddot{x}(t) - C\dot{x}(t) - Kx(t)$$

Og regner positivt NEDAD!

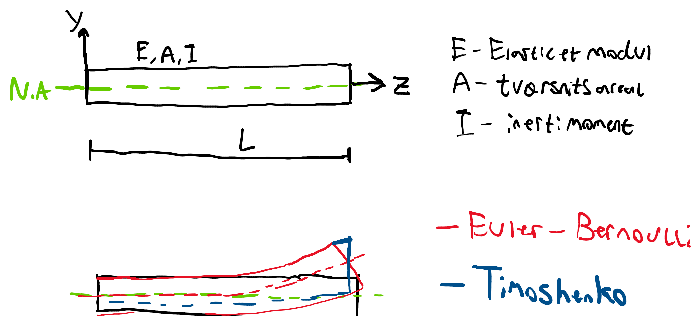
Observation 2.1: Jævnfør Maxwell-Bettis sætning har vi at

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Lad os sige vi kigger på en bjælkes flytning i enden med kraften i midten - Det er det samme som at kigge på flytningen i midten med kraften i enden.

3. Statisk bjælketeori (Euler-Bernoulli)

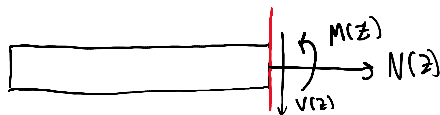
Antagelse 3.1: Bjælkens tværsnit forbliver plane og ortogtalt på bjælkeaksen (neutralaksen). Ilustreret:



Vi betragter vores kontinuerte flytningsfelter (hvor φ_y er flytningen horisontalt, og φ_z er den axielle flytning)

$$\varphi(z) = \begin{bmatrix} \varphi_z(z) \\ \varphi_y(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Vi snitter i bjælken og ser på hvilke mekaniske størrelser der virker:



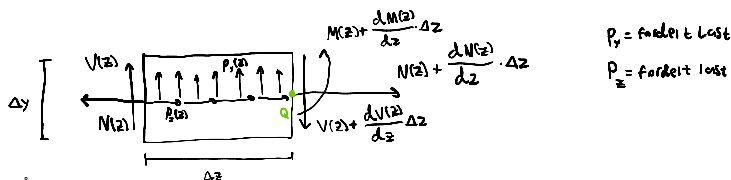
For en Euler-Bernoulli-Bjælke har vi to konstitutive relationer (de relationer der knytter min mekaniske størrelser (kræfter) til mine kinematisk størrelser (flytning))

$$N(z) = EA \frac{d\varphi_z(z)}{dz} \quad (3.1a)$$

Og

$$M(z) = EI \frac{d^2\varphi_y(z)}{dz^2} \quad (3.1b)$$

Vi bemærker at $\frac{d\varphi_z(z)}{dz}$ er lig aksial tøjning (axial strain) og $\frac{d^2\varphi_y(z)}{dz^2}$ er lig krumningen (curvature) Hvis vi kigger på et lille udsnit af vores bjælke:



Ved opskrivelse af ligevægt i z-retningen opnåes:

$$\frac{dN(z)}{dz} = -p_x(z) \quad (3.2)$$

Vi indsætter 3.1a i 3.2 hvoevad vi får stangens differentiaalligningen

$$EA \frac{d^2\varphi_z(z)}{dz^2} = -p_x(z) \quad (3.3) \quad \text{Axiel flytning}$$

Ved sum i y-retningen opnåes

$$\frac{dV(z)}{dz} = -p_y(z) \quad (3.4)$$

Moment ligevægt omkring Q yder (under antagelse om at Δz er småt, så $\Delta z^2 \approx 0$)

$$\frac{dM(z)}{dz} = V(z) \quad (3.5)$$

De to er begge blot mekaniske relationer. Vi indsætter (3.5) i (3.4) og får

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = p_y(z) \quad (3.6)$$

Indsættelse af (3.1b) i (3.6) giver

$$EI \frac{d^4\varphi_y(z)}{dz^4} = p_y(z) \quad (3.7) \quad \text{Transversflytning}$$

Vi observerer at de to (3.7) og (3.3) (bjælkens differentialligninger) ikke er koblede.

Eksempel 3.1 (adressering af (3.3))



givet:

Vi ønsker at bestemme δ .

Vi ser $p_x(z) = 0$, og $N(z) = N = P$

ved bring op ΔL

$$P = EA \frac{d\varphi(z)}{dz} \Rightarrow \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{P}{EA} \Rightarrow$$

$$\varphi_z = \int \frac{P}{EA} dz = \frac{P}{EA} z + C = \frac{Pz}{EA} \quad (C=0 \text{ da } \varphi(0)=0)$$

ved L

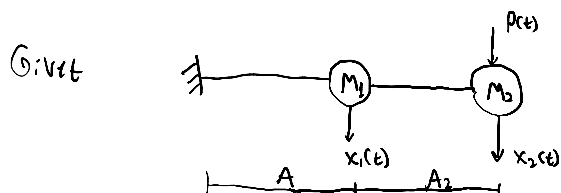
$$\varphi_z(L) = \frac{PL}{EA}, \text{ Jøvn for Hookes Lov,}$$

$$\varphi_z(L) \cdot \frac{E}{A} = P,$$

$$\Rightarrow k_{EA} = \frac{EA}{L}$$

$$\text{da } \delta = \frac{1}{k_{EA}} \Rightarrow \delta_{11} = \frac{L}{EA}$$

Eksempel 3.3 (sammenfattende eksempel)



Målet: Find M, K og $F(t)$

Vi benytter D'Alemberts Princip

$$x_2(t) = \delta_{22} P(t) - \delta_{21} m_1 \ddot{x}_1(t) - \delta_{12} m_2 \ddot{x}_2(t)$$

Vi er: $n=2$
 m_1 og m_2 for $n=1, 2$

$\Rightarrow$

$$\delta_{21} m_1 \ddot{x}_1(t) + \delta_{22} m_2 \ddot{x}_2(t) + x_2(t) = \delta_{22} P(t)$$

for x_1

$$x_2(t) = \delta_{22} P(t) - \delta_{21} m_1 \ddot{x}_1(t) - \delta_{12} m_2 \ddot{x}_2(t)$$

$\Rightarrow$

$$\delta_{21} m_1 \ddot{x}_1(t) + \delta_{22} m_2 \ddot{x}_2(t) + x_2(t) = P(t) \delta_{22}$$

Vi samler i system

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \end{bmatrix} P(t)$$

$\Rightarrow$ Pre-multiplication med δ^{-1}

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_K \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \end{bmatrix}}_{F(t)} P(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P(t) \end{bmatrix}$$

NOTE OM KONSTANT LAST!

FOR EN UNDERKRITISK DÆMPET SITUATION, DER ER MED EN KONSTANT EKSTERN LAST GÆLDER DET AT

$$x_{ss} = \frac{F}{k}$$

På matrice form altså

$$x_{ss} = K^{-1} F$$