

Lecture 12 - Svingning af rumligt kontinuerede systemer (del 1)

26. november 2024 08:26

Indholdsfortegnelse

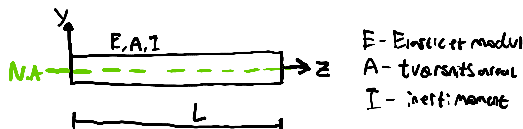
1. Kort repetition

- Aksialsvingning af strænger & bjælker
 - Etablere bevægelsesligning for tvungen udæmpet svingning
 - Løsning til udæmpet egensvingning (Et specialtilfælde af det ovenstående)
 - Eksempel
 - Kig på implementering af dæmpning og eksterne laster.

3. Gennemgang af eksamensopgave 3 sæt 1.

1. Repetition

Vi betragter en statisk Euler-Bernoulli bjælke.



- Tværsnit forbliver plane
- Tværsnit forbliver ortogonale på bjælkeaksen (N.A)

Vi har flytningsfelterne som vi samler i vektoren φ

$$\varphi(z) = \begin{bmatrix} \varphi_z(z) \\ \varphi_y(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$\varphi_z = \text{flytning i } z, \varphi_y = \text{flytning i } y$

Vi har de konstitutive relationer (Konstitutive relationer er relationer der relaterer mekaniske og kinematiske relationer)

$N(z) = EA \frac{d\varphi_z(z)}{dz}$	(1.1a)
--------------------------------------	--------

$M(z) = EI \frac{d^2\varphi_y(z)}{dz^2}$	(1.1b)
--	--------

Hvorned vi kan opstille

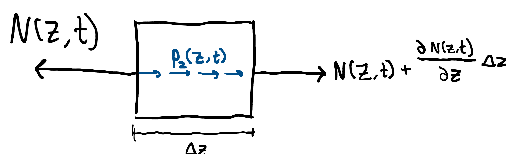
$EA \frac{d^2\varphi_z(z)}{dz^2} = -p_z(z)$	(1.2a)	Axial flytning
---	--------	----------------

$EI \frac{d^4\varphi_y(z)}{dz^4} = p_y(z)$	(1.2b)	Transversflytning
--	--------	-------------------

2. Aksialsvingning af stænger og bjælker

Målet er at inkludere dynamiske effekter i (1.2a) (altså det bliver tidsafhængigt)

Vi har for vores bjælke



Vi lader massedensiteten være betegnet som $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ (da den er antaget som skalar, antages den konstant henover bjælken.)

Newtons anden lov giver os (husk at masse er densitet $\times$ volumen)

$$\rho A \Delta z \frac{\partial^2 \varphi_z(z, t)}{\partial z^2} = -N(z, t) + N(z, t) + \frac{\partial N(z, t)}{\partial z} \Delta z + p_z(z, t) \Delta z$$

Normal kraften går ud, og der divideres med Δz

$$\rho A \frac{\partial^2 \varphi_z(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial N(z, t)}{\partial z} + p_z(z, t)$$

Indsættelse af (1.1a) yder

$\rho A \frac{\partial^2 \varphi_z(z, t)}{\partial z^2} = EA \frac{d\varphi_z^2(z, t)}{dz^2} + p_z(z, t)$	(2.1)
---	-------

Uendeligt mange frihedsgrader, men vi har en skalarligning (vi har en partiel differentialligning). Det er en 2. ordens inhomogen partiel differentialligning faktisk.

For **egensvingning** skal det gælde at $p_z(z, t) = 0$

Så har vi en homogen differentialligning i stedet. Under denne betingelse bliver (2.1) til (og ved division af A og ρ)

$$\frac{E}{\rho} \frac{d^2 \varphi_z(z, t)}{dz^2} = \frac{\partial^2 \varphi_z(z, t)}{\partial z^2}$$

Der introduceres nu at $\eta = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ enhed: $\left[\frac{m}{s}\right]$ fåes

$\eta^2 \frac{d\varphi_z^2(z, t)}{dz^2} = \frac{\partial^2 \varphi_z(z, t)}{\partial z^2}$	(2.2)	Bevægelsesligning for udæmpet axial svigning
--	-------	--

Der henvises til η som værende bølgeudbredelseshastigheden. Den viser egentlig hvor lang tid det tager for "bølgen" at bredde sig op igennem søljen hvis man f.eks. Sætter noget bevægelse i gang i den anden side, går der noget tid før at det begynder i den anden ende.

Vi løser 2.2 med separation af variable. Det introduceres at

$\varphi_z(z, t) = \phi(z)q(t)$	(2.3)
---------------------------------	-------

Det ligner vores modaldekobling (som overhovedet ikke er tilfældigt!!!!)

Med introduktion af (2.3) kan (2.2) skrives

$$\eta^2 \phi''(z)q(t) = \phi(z)\ddot{q}(t)$$

Der separeres variable

$\frac{\eta^2 \phi''(z)}{\phi(z)} = \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}$	(2.4)
---	-------

Siden 2.4 skal holde for alle z og t skal det være lig en konstant. Der kan skrives

$\frac{\eta^2 \phi''(z)}{\phi(z)} = \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\omega^2$	(2.5)
---	-------

Hvor $\omega \in \mathbb{R} \geq 0$

(2.5) Giver to ordinære differentialligninger

$\begin{cases} \frac{\eta^2 \phi''(z)}{\phi(z)} = -\omega^2, (2.6a) \\ \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\omega^2, (2.6b) \end{cases}$	
--	--

Til 2.6a får vi

$\phi''(z) + \frac{\omega^2}{\eta^2} \phi(z) = 0$	(2.7)
---	-------

Løsningen her til er

$\phi(z) = A \cos\left(\frac{\omega}{\eta} z\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{\eta} z\right)$	(2.8)
---	-------

Til 2.6b får vi

$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$	(2.9)
-----------------------------------	-------

Med løsning hertil

$q(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$	(2.10)
--	--------

2.7 er vores randværdi problem, 2.9 er et begyndelsebetingelsesproblem. Dvs. coefficienterne A og B findes vha. randbetingelser, og C og D skal bestemmes med begyndelsesbetingelser.

Vores problem er rumligt kontinuerligt, hvorfor $n = \infty$. Hermed har vi uendeligt mange egensvingningskonfigurationer, og vi kan herfor skrive

$\phi_j(z) = A_j \cos\left(\frac{\omega_j}{\eta} z\right) + B_j \sin\left(\frac{\omega_j}{\eta} z\right), j = 1, 2, 3 \dots$	(2.11a)	Egensvingningsformer
--	---------	----------------------

Det samme er gældende for q

$q_j(t) = C_j \cos(\omega_j t) + D_j \sin(\omega_j t), j = 1, 2, 3 \dots$	(2.11b)
---	---------

Så i det her tilfælde!! Med fri svingning, er ω vores egensvingningsfrekvens. Vi har uendeligt mange egensvingningsformer

Vores totale løsning (jævnfør (2.3)) bliver således

$\varphi_z(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j q_j$	(2.12)
--	--------

Her er ϕ_j IKKE en egenvektor, men en egenfunktion!

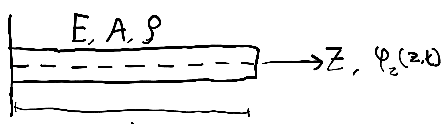
Sætning 2.1: Egensvingningsformerne, $\phi_j(z)$ er ortogonale.

Bemærkning 2.1: Det indre produkt af $\phi_j(z)$ og $\phi_k(z)$ er givet ved:

$$\int_0^L \phi_j(z) \phi_k(z) dz$$

Eksempel 2.1

Givet:



L

Randbedingungen

$$\varphi_z(0,0) = 0 \iff \varphi_j(0) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_z(L,0)}{\partial z} = 0 \iff \frac{d \varphi_j(L)}{dz} = 0$$

V: für Sinusdes Form (2.11a), oft

$$\varphi_j(0) = A_j$$

$$\frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial z} = \frac{\omega_j}{\eta} B_j \cos\left(\frac{\omega_j}{\eta} z\right) \Rightarrow \frac{\partial \varphi_j(L)}{\partial z} = \frac{\omega_j}{\eta} B_j \cos\left(\frac{\omega_j}{\eta} L\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\omega_j}{\eta} L\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_j}{\eta} L = j\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(2j-1)}{2}, j=1,2,\dots$$

$$\text{if } \omega_j = \frac{\pi(2j-1)\eta}{2L} = \frac{\pi(2j-1)}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Vi: für Sinusdes

$$\varphi_j = B_j \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2L} z\right), j=1,2,\dots$$

Verdacht selb.

Vi: Vorgehensweise (Bj ergibt sich aus v. Kanten Spannung an Ständig Summe eegensungsform (Bj Faktoren in Form! nicht separate)

Und k=1, Sinusdes

$$\int_0^L \varphi_j(z) \varphi_k(z) dz = \int_0^L B_j \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2L} z\right) B_k \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2L} z\right) dz$$

$$= B_j B_k \int_0^L \text{Lange Beis für beide} \dots$$

$$= 0. \text{ Da er orthogonale für hinanden stehen}$$

Vi: hier nur für

$$\int_0^L \varphi_j(z) \varphi_j(z) dz = B_j^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi(2j-1)}{2L} z\right) dz$$

$$= B_j^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{L} z\right)\right) dz$$

$$= \frac{B_j^2}{2} \left[z - \frac{L}{\pi(2j-1)} \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{L} z\right) \right]_0^L$$

$$= \frac{B_j^2}{2} \left[L - \frac{L}{\pi(2j-1)} \sin(\pi(2j-1)) \right]$$

$$= \frac{B_j^2 L}{2}$$

Dann für 2.12. hat Vi

$$\varphi_z(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2L} z\right) \left(C_j \cos\left(\frac{\pi(2j-1)\eta}{2L} t\right) + D_j \sin\left(\frac{\pi(2j-1)\eta}{2L} t\right) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z) \left(C_j \cos\left(\frac{\pi(2j-1)\eta}{2L} t\right) + D_j \sin\left(\frac{\pi(2j-1)\eta}{2L} t\right) \right)$$

for t=0

$$\varphi_z(z,0) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j C_j \Rightarrow$$

$$\varphi_k \varphi_z(z,0) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j C_j \varphi_k$$

integre für beide Seiten

$$\int_0^L \varphi_k \varphi_j(z,0) dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^L \varphi_k \varphi_j C_j dz$$

$$= \int_0^L \varphi_k^2(z) dz \cdot C_k = \frac{B_k^2 L}{2} C_k$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{2}{\theta_k L} \int_0^L \phi_k(z) \varphi_z(z, 0) dz$$