Lecture 13 -

3. december 2024 11:56

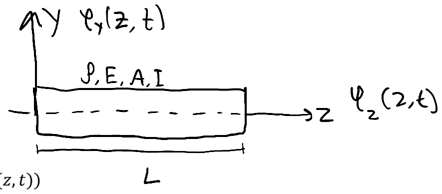
Indholdsfortegnelse

1. Transversalsvingning af Euler-Bernoulli bjælke (EB-Bjælke)
   - Etablering af bevægelsesligning for tvungen og udæmpet svingning
   - Løsning for udæmpet egensvingning (dvs. ingen tvungen last)
   - Eksempel
   - Implementering af dæmpning og/eller laster

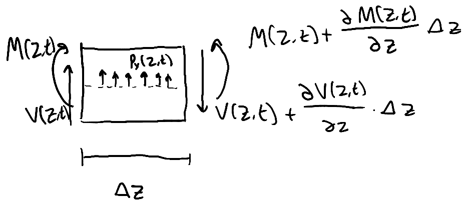
2. Gennemgang af opgave 3 i prøvesæt 1

1. Transversalsvingning af EB-Bjælker

Vi betragter en plan EB-bjælke (2D)



Vi ønsker at at beskrive $\varphi_y(z,t)$ (sidste lektion beksrev vi $\varphi_z(z,t)$)
Der laves et meget lille udsnit af bjælken.



Newtons 2nd lov i y yder:

$$\rho A\Delta z\frac{\partial^2\varphi_y(z,t)}{\partial t^2} = V(z,t) - (V(z,t) + \frac{\partial V(z,t)}{\partial z}\Delta z) + p_y(z,t)\Delta z$$

Hvorved

$$\rho A\frac{\partial^2\varphi_y(z,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} + p_y(z,t) \qquad (1.1)$$

Vi har den mekansike relation

$$\frac{\partial M(z,t)}{\partial z} = V(z,t) \qquad (1.2)$$

Samt den kinematiske relation

$$M(z,t) = EI\frac{\partial^2\varphi_y(z,t)}{\partial z^2} \qquad (1.3)$$

Hvor $\frac{\partial^2\varphi_y(z,t)}{\partial z^2}$ betegner krumningen.

Ved indsættelse af (1.2) og (1.3) kan vi skrive (1.1)

$\rho A\frac{\partial^2\varphi_y(z,t)}{\partial t^2} = -EI\frac{\partial^4\varphi_y(z,t)}{\partial z^4} + p_y(z,t)$	(1.4)	Bevægelsesligning for tvungning udæmpet svining af EB-bjælker. Transversal.

Egensvigning og løsning
Ved egensvigning kan vi reducere til (da $p_y = 0$)

$$\rho A\frac{\partial^2\varphi_y(z,t)}{\partial t^2} = -EI\frac{\partial^4\varphi_y(z,t)}{\partial z^4} \qquad (1.5)$$

Vi lad $\eta = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ og vi får

$$-\eta^2\frac{\partial^4\varphi_y(z,t)}{\partial z^4} = \frac{\partial^2\varphi_y(z,t)}{\partial t^2} \qquad (1.6)$$

Vi løser (1.6) via separation af variable. Vi introducerer

$$\varphi_y(z,t) = \phi(z)q(t) = \sum_{j=1}^{\infty}\phi_j(z)q_j(t) \qquad (1.7)$$

Ved indsættelse af (1.7) i (1.6) hvorved

$$-\eta^2\phi^{iv}(z)q(t) = \phi(z)\ddot{q}(t)$$

Ved omrukering

$$-\frac{\eta^2}{\phi(z)}\phi^{iv}(z) = \frac{\ddot{q(t)}}{q(t)} \qquad (1.8)$$

Da 1.8 skal holde for alle t og alle z så skal de to udtryk altså være lig en konstant. Vi får da to udtryk.

$-\frac{\eta^2}{\phi(z)}\phi^{iv}(z) = -\omega^2$	(1.9a)
$\frac{q\ddot(t)}{q(t)} = -\omega^2$	(1.9b)

For (1.9b) kan vi skrive

$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$	(1.10)

Som har løsningen

$$q(t) = G\cos(\omega t) + H\sin(\omega t)$$

Da vi har uendeligt mange egensvigninger, og dermed egenfrekvenser får vi altså

$q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j\cos(\omega_j t) + H_j\sin(\omega_j t)$	(1.11)

Hvor ω_j er den j'te egenfrekvens.

Vi retunerer til 1.9a. Hvorved vi kan skrive

$\phi^{iv}(z) - \frac{\omega^2}{\eta^2}\phi(z) = 0$	(1.12)

Vi ved at den principielle løsning til (1.12) er givet ved

$\phi(z) = ae^{\lambda z}$	(1.13)

Ved indsættelse af (1.13) i (1.12) yder

$$\lambda^4 ae^{\lambda z} - \frac{\omega^2}{\eta^2}ae^{\lambda z} = \left(\lambda^4 - \frac{\omega^2}{\eta^2}\right)ae^{\lambda z} = 0$$

Dette medfører at

$$\lambda^4 - \frac{\omega^2}{\eta^2} = 0$$

Lad $\varepsilon = \sqrt{\frac{\omega}{\eta}}$, således

$$\lambda^4 - \varepsilon^4 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} i\varepsilon \\ -i\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{cases}$$

Hermed fås

$$\phi(z) = a_1 e^{i\varepsilon z} + a_2 e^{-i\varepsilon z} + a_3 e^{\varepsilon z} + a_4 e^{-\varepsilon z}$$

Vi har at

$$a_1 e^{i\varepsilon z} + a_2 e^{-i\varepsilon z} = A\cos(\varepsilon z) + Bsin(\varepsilon z)$$

Med

$$A = a_1 + a_2, B = (a_1 - a_2)i$$

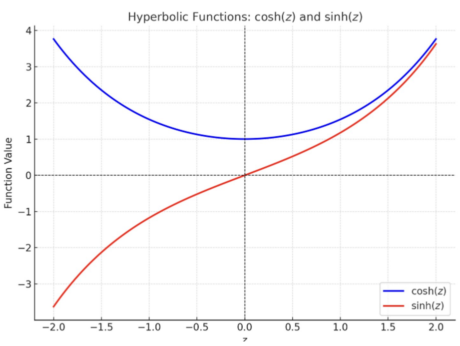
Vi husker desuden at,

$$\cosh(\varepsilon z) = \frac{1}{2}(e^{\varepsilon z} + e^{-\varepsilon z})$$

Og

$$\sinh(\varepsilon z) = \frac{1}{2}(e^{\varepsilon z} - e^{-\varepsilon z})$$

Et plot af disse ser således ud:



Hvormed

$$a_3 e^{\varepsilon z} = a_3(\cosh(\varepsilon z) + \sinh(\varepsilon z))$$

Og

$$a_4 e^{-\varepsilon z} = a_4(\cosh(\varepsilon z) - \sinh(\varepsilon z))$$

Der kan omskrives til

$$\phi(z) = A\cos(\varepsilon z) + Bsin(\varepsilon z) + C\cosh(\varepsilon z) + D\sinh(\varepsilon z)$$

Hvor $C = a_3 + a_4$ og $D = a_3 - a_4$

Vi observerer at egensvingning for tranvervsal svining, ikke kun er harmonisk. Det er en superposition af harmoniske funktioner og hyperboliske funktioner

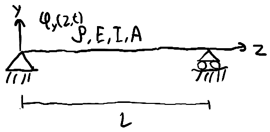
Vi har altså slutteligt

$$\phi_y = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(z) + B_j sin(\varepsilon_j z) + C_j \cosh(z) + D_j \sinh(\varepsilon_j z) \qquad (1.15)$$

Et eksempel!

Eksempel 1.1.

Find egensvingningsformer og Egenfrekvenser



Randbetingelser

$$\varphi_y(0,t) = \varphi_y(L,t) = 0 \iff$$

$$\phi_j(0) = \phi_j(L) = 0.$$

Vi har at Momentet i Enderne Må være 0.

og siden

$$M(z,t) = EI \frac{\partial^2 \varphi(z,t)}{\partial z^2}$$

Så må

$$\frac{\partial^2 \varphi_y(0,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi_y(L,t)}{\partial z^2} = 0 \iff \phi_j''(0) = \phi_j''(L) = 0$$

Vi Noterer at

$$\frac{\partial^2 \varphi_y(z,t)}{\partial z} = \varepsilon_j^2 \left(-A_j \cos(\varepsilon_j z) - B_j \sin(\varepsilon_j z) + C_j \cosh(\varepsilon_j z) + D_j \sinh(\varepsilon z)\right)$$

Randbetingelser for $z=0$ yder

$$\phi_j(0) = 0 = A_j + C_j,$$

$$\phi_j''(L) = 0 = -A_j + C_j,$$

derfor $A_j = C_j = -C_j = 0$

For $z = L$

$$\phi_j(L) = B_j \sin(\varepsilon_j L) + D_j \sinh(\varepsilon_j L) = 0$$

$$\phi_j''(L) = -B_j \sin(\varepsilon_j L) + D_j \sinh(\varepsilon L) = 0$$

Hvorfor

$$B_j \sin(\varepsilon_j L) + D_j \sinh(\varepsilon_j L) = -B_j \sin(\varepsilon_j L) + D_j \sinh(\varepsilon_j L)$$

$$\Rightarrow 2 B_j \sin(\varepsilon_j L) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_j L = j\pi \Rightarrow \varepsilon_j = \frac{j\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\omega_j}{\eta}} = \frac{j\pi}{L} \Rightarrow \omega_j = \frac{j^2 \pi^2 \eta}{L^2} = \underline{\frac{j^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}} \quad \text{Ans.}$$

De tilhørede egensvingnisformer er givet som

$$\underline{\phi_j(z) = B_j \sin\left(\frac{j\pi}{L} z\right)} \quad \text{Ans.}$$

Til eksamen vil man bare kunne INDSÆTTE sine randbetingelser i den her, og se om det tjekker ud.