

Noter fra timen (Free undamped vibration)

10. september 2024 12:02

Indholdsfortegnelse

1. Indledende Noter
2. Fri svingning / egensvingning af SDOF-systemer
 - Bevægelsesligningen
 - Implementering af begyndelsesbetingelser
 - Betragtning omkring mekanisk energi
3. Ækvivalente stivheder.

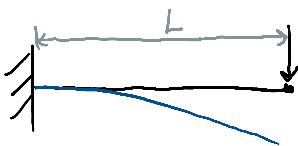
Indledene noter

Antagelse 1.1: De systemer vi analyserer i kurset er linære og tidsinvariante (LTI - linear and time independent)

Bemærkning 1.1: System linearitet indebærer:

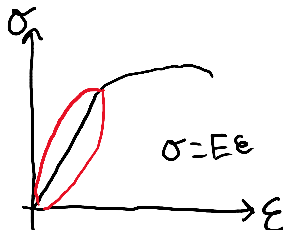
- "små" flytninger og drejninger
- Linært elastisk materiale opførsel
- Linær-viskos dæmpning

Eksempel på små flytninger.



Vi folder altså vores geometriske parametre konstant. Længden og areal er det samme for det ubøjede og det bøjede

Eksempel på linært elastisk material. Vi arbejder KUN indenfor det røde område. Vi følger hookes lov.



- **Bemærkning 1.2:** Tidsinvarians

- Vi antager at vores system parametre IKKE varier i forbindelse med tid. Systemtidsinvarians indebærer at massen, dæmpningen og stivheden ikke varier i tiden.

Med andre ord antages stivhed, masse og dæmpning alle for konstante.

Definition 1.1: Frihedsgrader

- En frihedsgrad (DOF) er et koordinat, der beskriver bevægelse af eller i ét punkt i én retning. Retningen kan både være translation eller rotation, men kun én retning!

Bemærkning 1.3

Lad n være antallet af DOF, så har vi (jævnfør definition 1.1)

- SDOF systemer ($n = 1$)
 - MDOT systemer ($n \in \mathbb{N}_{>1}$)
 - Kontinua ($n = \infty$)
- Handwritten notes: } Rummeligt + diskret (for SDOF and MDOT), } Rummeligt + kontinuert (for Kontinua)*

Vores primære fokus lægger på rummeligt diskrete system

Definition 1.2: Svingningstyper

- Der eksisterer to overordnede svingningstyper
 - Fri svingning / egensvingning: Ingen eksterne laster
 - Tungen svingning: Der er eksterne laster

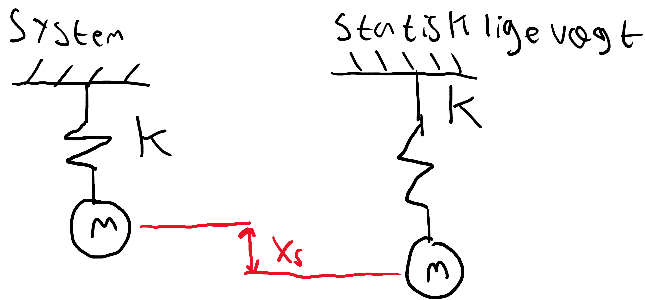
Definition 1.3: Dæmpning

- Dæmpning er enhver form for ændring i mekanisk energi, der **ikke** skyldes eksterne laster eller begyndelsebetingelser

Fri svingning af udæmpet SDOF systemer

Forklaring:

Svingningen uden ekstern last, uden dæmpning (dvs intet der trækker energi ud af systemet). Et eksempel kunne være.



Den statiske ligevægt formaliseres som

$$mg - kx_s = 0 \quad (2.1)$$

Med x_s som den statiske flytning

Den dynamiske ligevægt formaliseres som: (Den dynamiske frihedsgrad sættes som alt der flytter sig ifh til den dynamiske konfiguration, denne flytning kaldes $x(t)$)

$$m\ddot{x}(t) = mg - k(x_s + x(t))$$

Vi kan omskrive

$$m\ddot{x}(t) = mg - kx_s - kx(t)$$

Jævnfør 2.1 kan vi omskrive til

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.2)$$

(2.2) er bevægelsesligningen, og den er lineær, ordinær, homogen og af anden grad.

Løsningen til (2.2) er givet ved:

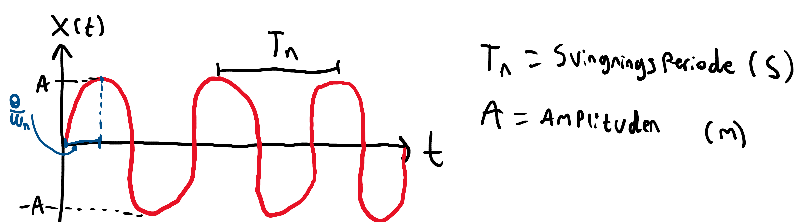
$$x(t) = ae^{\lambda t} \quad (2.3)$$

Hvor $a, \lambda \in \mathbb{C}$ og $t \in \mathbb{N}_{>0}$

Indsættelse af (2.3) i (2.2) giver

$$m\lambda^2 ae^{\lambda t} + kae^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow (m\lambda^2 + k)ae^{\lambda t}$$

Svingningen for sådan en ville se således ud:



Tilbage til ligningen: Vi skal løse den. Vi har at $m \neq 0$, $k \neq 0$ og $e^{\lambda t} \neq 0$. Desuden antages det at $a \neq 0$ (Fordi så vil vi ingen bevægelse have)

På baggrund af det, får vi at

$$m\lambda^2 + k = 0 \Leftrightarrow \lambda \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

Vi definerer nu at $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Så vi får altså

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.4)$$

Indsættelse af (2.4) i (2.3) giver

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_n t} + a_2 e^{-i\omega_n t}$$

Vha. Eulers relation kan vi dog omskrive til

$$x(t) = a_1 (\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)) + a_2 (\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t))$$

Samles cos og sin

$$x(t) = (a_1 + a_2) \cos(\omega_n t) + (a_1 - a_2) i \sin(\omega_n t)$$

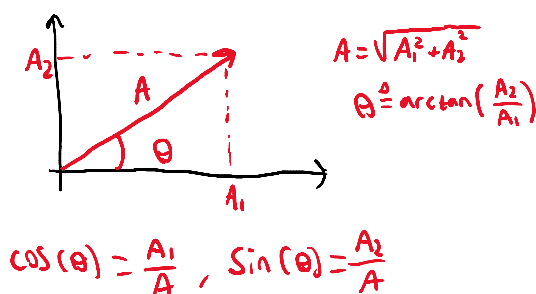
Vi definerer nu $A_1 = a_1 + a_2$ og $A_2 = (a_1 - a_2) i$

Så gælder det at $A_1 = \mathbb{R}$ og $A_2 = \mathbb{R}$ (se bevis hjælpesætning 2.1), så får vi løsningen til at være:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \quad (2.5)$$

Hvor ω_n er cyklisk egenfrekvens med enhed $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$

Alternativt kan vi definere løsningen på en anden måde:



← Vigtig
= 7

Hvis vi indsætter dette i 2.5, kan denne skrives om

$$x(t) = A \cos \theta \cdot \cos(\omega_n t) + A \sin \theta \cdot \sin(\omega_n t)$$

Ved hjælp af lidt trigonometriske regnearbejder får vi

$$x(t) = A \left(\frac{\cos(\theta - \omega_n t) + \cos(\theta + \omega_n t)}{2} + \frac{\cos(\theta - \omega_n t) - \cos(\theta + \omega_n t)}{2} \right)$$

Hvilket til sidst giver os

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \theta) \quad (2.6)$$

Den naturlige egenfrekvens er givet som: Dette er et mål for hvor mange svingninger (perioder) vi har pr sekund

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Med enhed $\left[\frac{1}{\text{s}}\right] = [\text{Hz}]$

Det følger også derfor at perioden (hvor mange sekunder en svingning (oscillation) tager)

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

Med enhed $[\text{s}]$

Begyndelsesværdier:

(2.2) kan udvides til begyndelsesværdi problemet

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad x_0 = x(0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0)$$

Vi får altså

$$x_0 = A_1$$

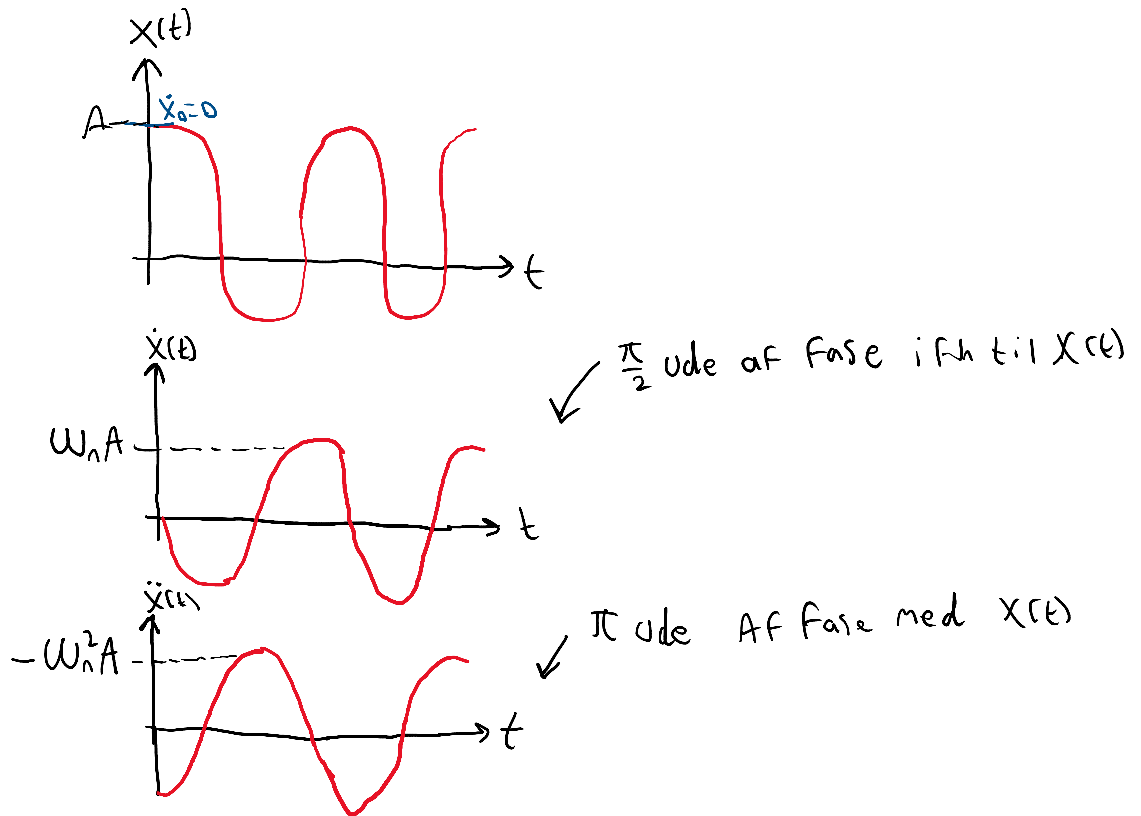
Og

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A_1 \sin(\omega_n t) + \omega_n A_2 \cos(\omega_n t)$$

Hvilket giver os

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

Eksempel med begyndelsværdier:



Kinetisk energi i SDOF system

Maksimal kinetisk energi i system:

$$E = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2$$

Maksimal potentiel energi i system

$$U = \frac{1}{2} k A^2$$

Forbindelse af fedre:

Se noter.

Bevægelsesligningens løsninger i SDOF

$$x(t) = A \cos \theta \cdot \cos(\omega_n t) + A \sin \theta \cdot \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A_1 \sin(\omega_n t) + \omega_n A_2 \cos(\omega_n t)$$

Og

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \theta)$$

$$\dot{x}(t) = -A \omega_n \sin(\omega_n t - \theta)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \theta)$$