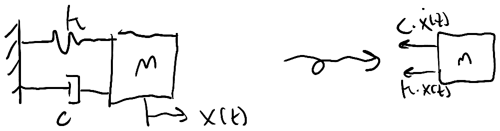
Noter fra timen - Harmonisk lastede SDOF-systemer

24. september 2024 12:14

Indholdsfortegnelse

Indedende noter

Fra lektion 3, system med dæmpning:



Newtons anden lov for systemet

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Løsningen til denne afhænger af dæmpningsforholdet

$$\zeta = \frac{c}{C_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

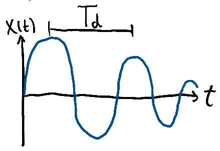
For $0 < \zeta < 1$ (underkritisks dæmpning) har vi løsningen

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \theta)$$

Med

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Vores system ser således ud

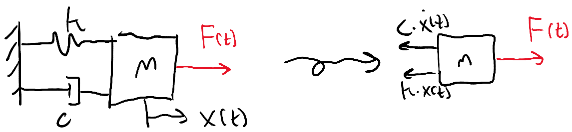


Hvor T_d er den dæmpede periode. Vi har desuden forholdet

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{1}{f_d}$$

Introduktion af ekstern kraft til systemet

Vi introducerer nu en ekstern last, $F(t)$



Newtons anden lov lyder nu

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Dette er bevægelsesligningen for et LTI system der påvirkes af en ekstern last k

Løsningen til denne ligning lyder

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Hvor x_h er den homogene løsning, og x_p er den partikulære løsning

Vi kan bestemme x_p ved hjælp af følgende metoder
- Ubestemte koefficienters metode
- Laplace -/ Fouriertransformation
- Foldningsintegrale (convolution) (Duhamels integrale)
- Tidsintegration (numerisk metode)

Generelt gælder det, at $x_p \neq x_{ss}$, dog er det modsatte gældende ved nogle eksempler.
(Se definition 1.2)

Harmonisk lastede SDOF-systemer

Her gælder det, at

$$F(t) = F_0\cos(\Omega t)$$

Hvor F_0 er lastamplituden og Ω er lastfrekvensen

Dvs. Ω fortæller hvor hurtigt lasten påvirker, og F_0 fortæller med hvilken størrelse.

Vi får altså newtons anden low på formen:

Defintioner

Defintion 1.1

En ekstern last $F(t)$ er determinististik, hvis vi kender funkionsforskriften for den for alle t

En ekstern last er stokastisk, såfremt $F(t)$ ikke kendes for alle t

Bemærkning: I indeværende kursus beskæftiger vi os kun med deterministiske laster.

Definition 1.2

Lad $t \to \infty$, så gælder det, at

$$x(t) \to x_{ss}(t),$$

Hvor x_{ss} er det stationære respons.
Responset inden betegnes det transiente.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

Vi ved, at (Fra ubestemte koefficienters metode)

$$x_p(t) = B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t)$$

Dette kan alternativt skrives

$$x_p(t) = B \cos(\Omega t - \psi)$$

Med

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \text{ og } \psi = \arctan\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$$

Eller alternativt

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+c^2\Omega^2}} \text{ og } \psi = \arctan\left(\frac{c\Omega}{k-m\Omega^2}\right)$$

Alternativt kan de skrives som

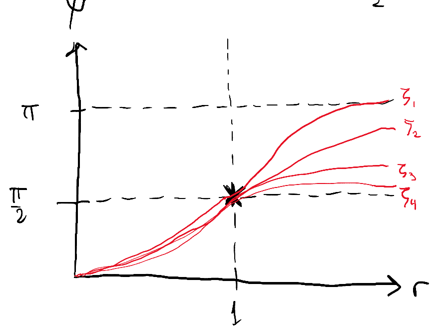
$$B = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+4\zeta^2r^2}} \text{ og } \psi = \arctan\left(\frac{2r\zeta}{1-r^2}\right)$$

Med **frekvensforholdet**

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

ψ representerer den forsinkelse der er, mellem vi påfører en kraft, og systemet begynder at flytte sig. Er $\psi = \frac{\pi}{2}$ så har vi resonans, og så ved vi at $r = 1$

Så snart at $\psi = \frac{\pi}{2}$ i x_p, så ved vi, at vi har resonans



Og så er r=1 :)

B represensterer amplituden af den stationære respons af systemet. (Måske)?

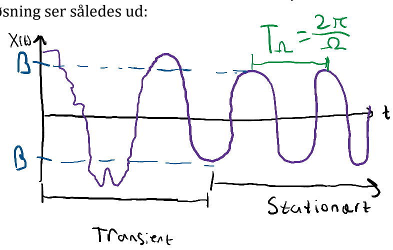
Den **partikulære** løsning for et harminsk dæmpet SDOF system bliver altså

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{c\Omega}{k-m\Omega^2}\right)\right)$$

Dvs den totale løsning for et underkritisk dæmpet SDOF system belastet af en harmonisk last er

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \theta) + \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{c\Omega}{k-m\Omega^2}\right)\right)$$

For denne løsning, gælder det at for $t \to \infty$, så $x(t) \to x_p(t)$ (altså et special tilfælde af definition 1.2), dvs. vores løsning ser således ud:

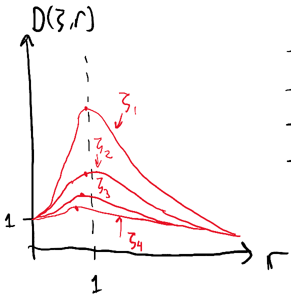


***OBS**, når man løser udtrykket med initial values, skal man huske at bruge HELE udtrykket!*

Forstærkningsforhold
Forstærkningsfaktoren er givet ved:

$$D(\zeta, r) = \frac{Bk}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}}$$

Forstærkningsforholdet er forholdet mellem den dynamiske flytning og den statiske flytning



- $r = 0 \iff D = 1$ (Statisk)
- $r \to 0^+ \iff D \to 1$ (kvasi statisk)
- $r = 1 \iff D = \frac{1}{2\zeta}$ (Resonans)
- $r \to \infty \iff D \to 0$ (Høj frekvens)

Vi har $\zeta_4 > \zeta_1$.

Jo mindre dæmpningsforholdet ζ er, jo højere er forstærkningsfaktoren. Det vil altså sige, at den dynammiske flytning er højere i forhold til den statiske flytning, når vi har lav dæmpning.

Forstærkningsfaktoren fortæller os hvor væsentlige de dynamiske laster er, i forhold til hvis vi havde regnet systemet stationært.