

Noter fra timen MDOF del 1

22. oktober 2024 12:00

Indholdsfortegnelse

Dagens emne: Egensvingning af MDOF-systemet

1. Introduktion til egensvingning af MDOF-systemer
 - Etablering af bevægelsesligningsystemet
 - Eksempel herpå
2. Udæmpede egensvingning af MDOF-systemer
 - Bevægelsesligningsystemet
 - Et udæmpet egenværdi problem
 - Systemresponset (En af løsningerne til bevægelsesligningen)
 - Energibetragtninger
 - Eksempel herpå
3. Visse systemkarakteristika
 - Symmetri
 - Rang og nullitet
 - Egenfrekvens ved stivlegemebevægelse
 - 2 Eksempler herpå

1. Introduktion til egensvingning af MDOF-system

Definition 1.1: Et MDOF-system er et rummeligt diskret system med $n \in \mathbb{N}_{>1}$ DOF.

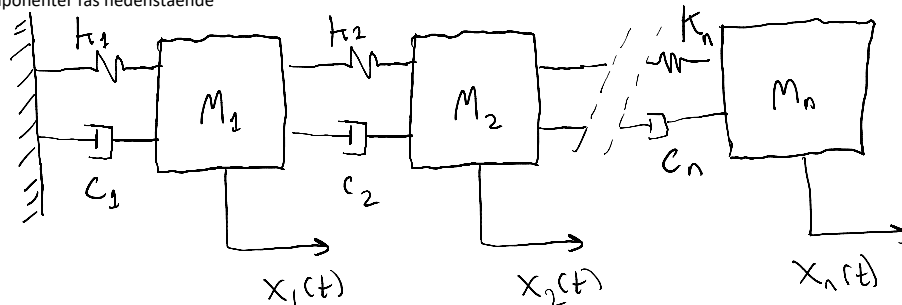
Modellerings teknikker/metoder til at håndtere et MDOF system

Formålet er et at diskretisere det oprindelige kontinuum ved brug af n frihedsgrader. (det oprindelige kontinuum betyder virkeligheden, vi ønsker at "simplificere" dette med n frihedsgrader)

Det kan gøres på et par forskellige måder. Diskretisering kan foregå via:

- Brug af simple mekaniske komponenter (f.eks. Som en fjeder, en rotationsfjeder, dæmpningsmekaniser og punktmasser) <- Dette er fokus i indeværende kursus.
- Element metoden (FEM) (gør vi ikke)

Ved brug af de simple mekaniske komponenter fås nedenstående



Så nu bliver vores bevægelsesligning, til et bevægelsesligningssystem. Vores flytning er givet ved

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

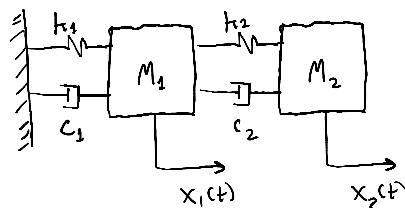
Og bevægelsesligningssystemet kan skrives som

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

Hvor M er vores massematrix, C er vores dæmpningsmatrix og K er vores stivhedsmatrix. Disse er kvadratiske, vi har altså

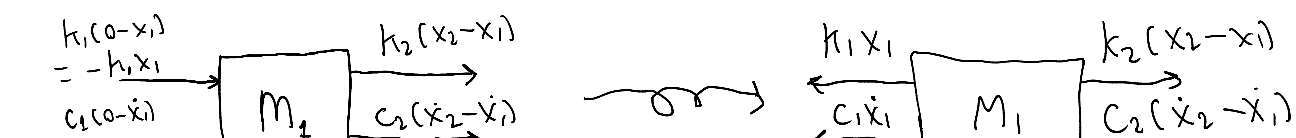
$$M, C, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

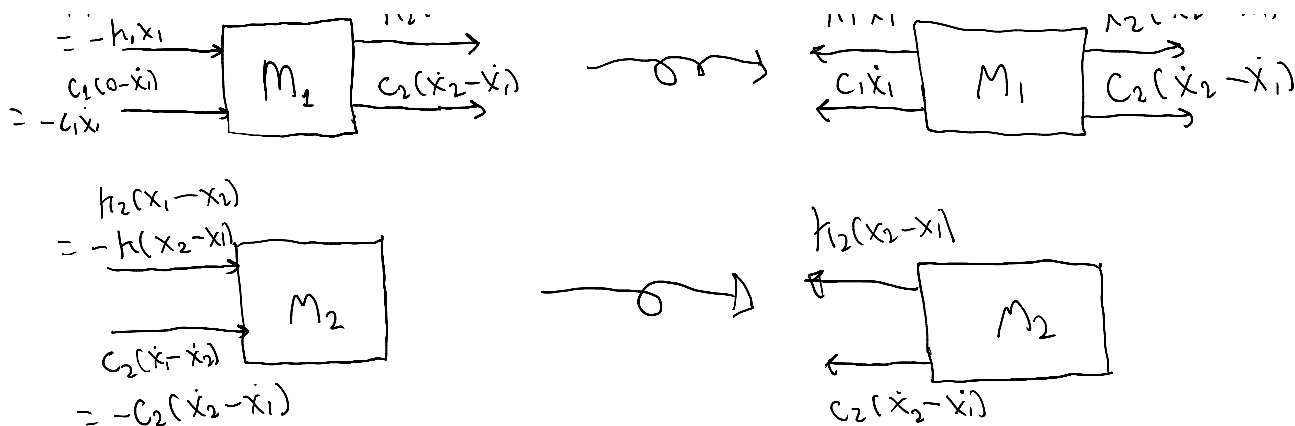
Eksempel 1.1: MDOF system med 2 frihedsgrader



Her ses vores system. Vores 2 frihedsgrader er den horisontale flytning af de 2 punktmasser.

Vi fritskærer her masserne og opstiller de tilhørende fritlegemediagrammer. Vi tegner alle pilene i positiv retning, for at gå slavisk til værks. (Vi ganger med den relative flytning. Det punkt man står i, er altid den sidste, så f.eks. For k_1 er flytningen ved væggen 0, og flytningen ved "m1" er x_1)





Vi bruger newtons anden lov på hver masse

Masse 1:

$$m_1 \ddot{x}_1 = c_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1$$

Vi omskriver

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(c_1 + c_2)\dot{x}_1 + c_2 \ddot{x}_2 - (k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$

Yderligere (trækker alt på samme side)

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

Masse 2:

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1)$$

Trækker alt over

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Nu samler vi det til et samlet system med en massematrix, dæmpningsmatrice og stivhedsmatrice

Vi får

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Her har vi vores bevægelseligningssystem for vores 2DOF system

$$\text{Vi har } M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \text{ og } K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Vi ser vores ligninger er koblet igennem stivheds og dæmpningsmatricerne (Begge frihedsgrader indgår i begge differentialligninger)

Observation 1.1:

For alle 3 matricer ser vi at de er symmetriske (altså at $M = M^T, C = C^T, K = K^T$)

2. Udæmpede egensvingningen

Vi antager at dæmpningsmatricen C er lig nul. Vi har altså ikke noget dæmpning i system. Det medfører vores bevægelseligningssystem kommer til at se således ud:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (2.1)$$

Løsningen til (2.1) er

$$x(t) = \phi a e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

Hvor $a \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ og $\phi \in \mathbb{R}^n$

Indsættelse af (2.2) i (2.1) yder

$$(M(i\omega)^2 + K)\phi a e^{i\omega t} = 0$$

Omskrevet

$$(K - \omega^2 M)\phi a e^{i\omega t} = 0$$

Vi ved, at $e^{i\omega t} \neq 0$ og vi antager $a \neq 0$, hvorved vi får

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (2.3)$$

Vi introducerer at $\lambda = \omega^2$ og får

$$(K - \lambda M)\phi = 0 \quad (2.4)$$

2.4 Er et generaliseret egenværdiproblem. Såfrem M ikke er singular, følger det, at

$$(M^{-1}K - \lambda I)\phi = 0 \quad (2.5)$$

(I jurgens fag skrev vi typisk $M^{-1}K$ som A). Vi ser dette er et egenværdi problem! Hvor λ er egenværdi og ϕ er vores egenvektor

Vi betragter 2.4 og påtvinger betingelsen, at determinanten af matricen

$$|K - \lambda M| = 0 \quad (2.6)$$

(2.6) (hvilket gøres for at undgå den trivielle løsning $\phi = 0$). Desuden sikrer vi os at denne matrice er singular. Denne betingelse yder egenværdierne

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n$$

(Den første egen værdi er den mindste egen værdi). Husk desuden at vi definerede $\lambda = \omega^2$

Tilhørende de n egen værdier får vi egen vektorerne ϕ_j for $j = 1, \dots, n$ (altså at hver egen værdi har en egen vektor)

Vi introducerer nu 2 definitioner.

Definition 2.1: Spektralmatricen er givet ved

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_j^2 \end{bmatrix}$$

Definition 2.2: Modalmatricen er givet ved

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3 \dots \phi_n]$$

Modalmatricen er egentlig bare en matrice med egen vektorer som koller

Vi retunerer til ligning (2.2). Vi ser nu altså

$$x(t) = \phi a e^{i\omega t} = \sum_{j=1}^n \phi_j (a_j e^{i\omega_j t} + a_{2j} e^{-i\omega_j t})$$

Hvilket kan skrives som (vha eulers formel)

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j A_j \cos(\omega_j t - \theta_j) \quad (2.7)$$

Definition 2.3:

Et system med n DOF har n egensvingningskonfigurationer, der hvert består af en egen værdi λ og en tilhørende egen vektor ϕ_j

Vi retunerer atter

Vi lader

$$q_j(t) = A_j \cos(\omega_j t - \theta_j)$$

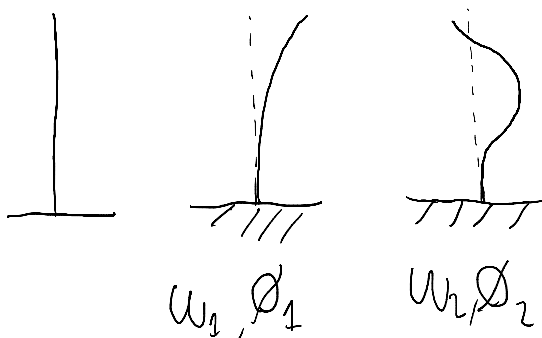
Dette giver os at

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j q_j(t) = \Phi q(t) \quad (2.8)$$

$$\text{Hvor } q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

Dvs. for at finde løsningen på et udæmpet MDOF system skal man finde egen værdier vha. formel 2.6 og derefter finde egen vektorerne ϕ . Vha formel 2.4 Så kan du indsætte i 2.8 og så har du en generel løsning. Udfra denne kan du så finde θ_j og A_j udfra initial values.

Vi ser at vores flytningsrespons i virkeligheden bare er en linear kombination af vores egen vektorer. Φ er vores egensvingsformer.



Energi betragtninger

Vi ved at

$E_{pot} = \frac{1}{2} x^T K x$	(2.9a)
$E_{kin} = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x}$	(2.9b)

Observation 2.1: For vores system gælder det, at

- Hvis $x = 0$, så er $E_{pot} = 0$ og $E_{kin} = \max$
- Hvis $\dot{x} = 0$, så er $E_{kin} = 0$ og $E_{pot} = \max$

Vi noterer at,

$$E_{pot} = \frac{1}{2} (\Phi q)^T K \Phi q(t) = \frac{1}{2} q(t)^T \Phi^T K \Phi q(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} q_j^2(t) \phi_j^T K \phi_j$$

Og

$$E_{kin} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_j^2(t) \phi_j^T M \phi_j$$

Så for $j = 1$ får vi hvor meget den første egensvingsningsform bidrager med de forskellige energier osv., for $j=2$ får vi meget den anden osv..

3.1 Visse systemkarakteristika

Sætning 3.1 (Maxwell-Betti):

Betragt et LTI-system med n frihedsgrader i to forskellige statiske realiseringer. (Vi betragter egentlig bare det samme system med 2 forskellige laster der virker). I en statisk konfiguration har vi

1. $Kx^{(1)} = F^{(1)}$
2. $Kx^{(2)} = F^{(2)}$

Så gælder det at

$$F^{(1)T} x^{(2)} = F^{(2)T} x^{(1)}$$

Følgesætning 3.1

$$K = K^T, M = M^T$$

Bevis (for K)

Sætning 3.2 (Rang nulitet)

Lad $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, så gælder det at

$$n = \text{rang}(A) + \text{nulitet}(A),$$

$$\text{Hvor nulitet}(A) = \dim(\text{null}(A))$$

Lad $a \in \text{null}(A)$, således

$$Aa = 0$$

Følgesætning 3.2

Det gælder for $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, at $\text{rang}(M) = n$

Betyder at $\text{nulitet}(M) = 0$

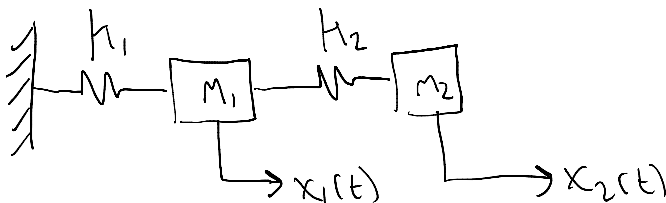
Følgesætning 3.3

Det gælder for $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ at

- $\text{Rang}(K) = \#$ lineært uafhængige elastiske bevægelsesformer ($E_{pot} > 0$)
- $\text{Nulitet}(K) = \#$ lineært uafhængige stiftlegemebevægelsesformer

EKSEMPLER!!

Eksempel 3.1



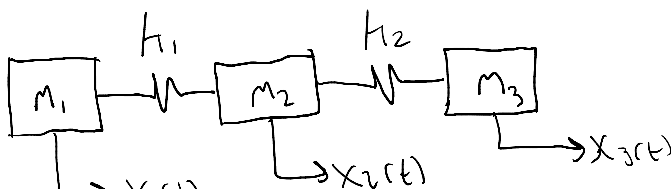
Vi har

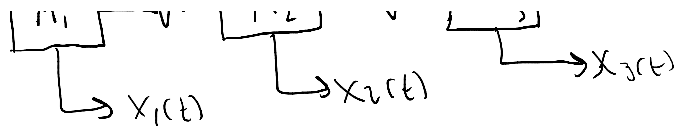
$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \text{ og } K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Vi ser

$\text{Rang}(M) = \text{rang}(K) = 2$. Her kan systemet altså ikke bevæge sig som det stift legeme

Eksempel 3.2





med

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

U: Ser

$$\text{Rang}(M) = 3$$

og

$$\text{Rang}(K) = 2$$

↳
Betyder $\text{Nullitet}(K) = 1$.

DER ER RESONANS I ET MDOF SYSTEM HVIS BLOT Ω matcher en ω_n . For hele systemet

En af egensvingerkonfigurationerne har resonans. Så hele systemet går i resonans.
Husk at ω_1 ikke hører til dof1 osv.