

Noter fra timen

29. oktober 2024 12:02

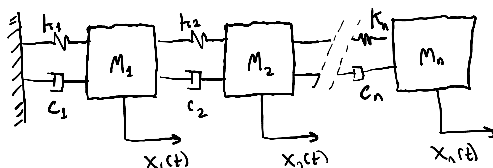
Indholdsfortegnelse

1. Repetition (Lektion 6)
 2. Yderligere system karakteristisk
 - $\phi_j \in \mathbb{R}^n$ (opgave 7.3)
 - Den modale massematrix og den modale stivhedsmatrix
 - Ortogonalitetsbetingelser
 3. Implementering af dæmpning (Del I)
 - Den modale dæmpningsmatrix
 - Definition af klassisk dæmpning
 - Betingelser for klassisk dæmpning (Opgave 7.4 - ikke en del af pensum)
 4. Gennemgang af opg 2. i prøvesæt 1.

1. Repetition

I lektion 6 kiggede vi på egensvingning af MDOF-systemer uden dæmpning ($C=0$)

Sådan et system ser således ud



Bevægelsesligningen for systemet kan skrives som:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

Med vores massematrix og stivhedsmatrix.

Der er visse system karakteristika for systemet ovenfor.

- For alle 3 matricer ser vi at de er symmetriske (altså at $M = M^T, C = C^T, K = K^T$)
- Rang af massematricen er n . Altså at $\text{rang}(M) = n \Leftrightarrow \text{nullitet}(M) = 0$
 - o Massen skal altid flyttes
 - o Ligegyldigt hvorledes mit system bevæges aktiveres massen
- $\text{Rang}(K) = \text{antal af lineært uafhængige elastiske bevægelsesformer}$
- $\text{Nullitet}(K) = n - \text{rang}(K) = \text{linært uafhængige stiftlegemebevægelser}$ (en stiftlegemebevægelse betyder at alle punkter i et legeme bevæger sig ligemeget, legemet bøjer ikke, trækker sig sammen osv. Det bevæger sig som et stift legeme)

Eksempel 1.1.: Rang af matricer ifh til bevægelse

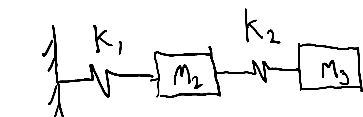


$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(M) = 3 \Leftrightarrow \text{Nullitet}(M) = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(K) = 2 \Leftrightarrow \text{Nullitet}(K) = 1$$

1 Lineær uafhængig stiftlegemebevægelse (Hvor alle systemet flytter sig sammen)

Vi: Erstatte M_1 med en væg



$$M = \begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Løsningen til bevægelsessystem fra opgave 1.1 er

$$x(t) = \phi a^{i\omega t} \quad 1.2$$

Indsættelse i bevægelsesligningen for systemet yder

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0$$

Vi introducerer og lader $\lambda = \omega^2$, så

$$(K - \lambda M)\phi = 0 \quad (1.3)$$

Dette er et egen værdi problem. ϕ er vores egenvektor og λ er en egenvektor

Vi påtvinger betingelsen til 1.3

$$|K - \lambda M| = 0 \quad (1.4)$$

Før at undgå nulløsningen $\phi = 0$

Ud af betingelse 1.4 får vi $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \dots \dots \leq \lambda_n$ (skal vi bruge til opg 7.3)

$$\Rightarrow 0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$$

Et system med n frihedsgrader har altså n egen værdier og dermed n egenfrekvenser

Til hver egen værdi λ_j følger en egenvektor, $\phi_j \in \mathbb{R}^n$

Vi samler vores egen værdier i vores spektral matrice:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Med $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Vi samler vores egenvektorer i modalmatricen

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2 \dots \phi_j] \quad (1.6)$$

Med $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Modalmatricen er altså en matrice med egenvektorer som koller

Vi returnerer til løsningen (1.2)

Modalmatricen er egentlig bare en matrice med egenvektorer som koller

$$x(t) = \phi a e^{i\omega t} = \sum_{j=1}^n \phi_j (a_j e^{i\omega_j t} + a_{2j} e^{-i\omega_j t})$$

Hvilket kan skrives som (vha eulers formel)

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j A_j \cos(\omega_j t - \theta_j) = \sum_{j=1}^n \phi_j (A_{1j} \cos(\omega_j t) + A_{2j} \sin(\omega_j t))$$

Så har vi n frihedsgrader, har vi n egenvektorer osv.

Hvis vi lader $q_j(t) = A_j \cos(\omega_j t - \phi_j)$, således kan får vi

Dette giver os at

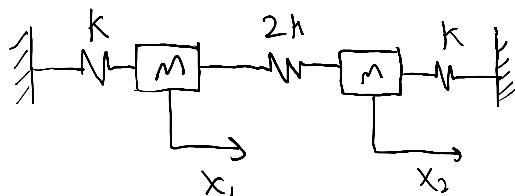
$$x(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j q_j(t) = \Phi q(t) \quad (1.7)$$

$$\text{Hvor } q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

Det fysiske perspektiv:

Alt hvad der sker i fri-svingning er blot en sum up over hvad der sker i de n egensvingsningsformer. Det er altså en lineær kombination af vores egensvingsningsformer. ϕ_j er en egensvingsningsform

Eksempel 1.2: energi betragtninger (fra sidste time)



Vi har (fra opgave fra lecture 6)

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 3K \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Så i første egensvingsform $\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Anden egensvingsningsform $\phi_2 = [1, 1]$



Vi vil gerne bevise at den første egensvingsningsform er hurtigere end den anden. Dvs. $\omega_2 > \omega_1$

Vi betragter den potentielle energi.

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}^{(1)} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{h} \mathbf{Q}_1 \\ &= \frac{1}{2} (A_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1))^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} A_1^2 \cos^2(\omega_1 t - \theta_1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= k A_1^2 \cos^2(\omega_1 t - \theta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_2^T \mathbf{Q}_2^T \mathbf{h} \mathbf{Q}_2 \\ &= \frac{1}{2} (A_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2))^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} A_2^2 \cos^2(\omega_2 t - \theta_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 5k A_2^2 \cos^2(\omega_2 t - \theta_2) \end{aligned}$$

Vi antager vi vælger $x_0, \dot{x}_0$ således $A_1 = A_2 \Rightarrow$

$$\max(E_{\text{pot}}^{(1)}) < \max(E_{\text{pot}}^{(2)})$$

Det medfører (da vi i rogn dampning har $\sin E_{\text{mek}} = \cos$)

$$\max(E_{\text{kin}}^{(1)}) < \max(E_{\text{kin}}^{(2)})$$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}^{(1)} &= \frac{1}{2} (-\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t - \theta_1))^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \omega_1^2 A_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \theta_1) M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}^{(2)} &= \frac{1}{2} \omega_2^2 A_2^2 \sin^2(\omega_2 t - \theta_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= M \omega_2^2 A_2^2 \sin^2(\omega_2 t - \theta_2) \end{aligned}$$

Derfor må

$$\omega_1 > \omega_2$$

(Fordi $M = m, A_1 = A_2$, og $\max(\sin(\omega_1 t - \theta_1)) = 1$)

2. Yderligere systemkarakteristika

Sætning 2.1

For alle $j \in [1, n]$, gælder det at $\phi_j \in$

Bevis: Opgave 7.3

Den Modale massematrice og den modale stivhedsmatrice

Definition 2.1: Den modale massematrice og den modale stivhedsmatrice er givet som:

$$\tilde{M} = \Phi^T M \Phi \quad (2.1a)$$

Og

$$\tilde{K} = \Phi^T K \Phi \quad (2.1b)$$

Det gælder for begge at $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Bevis definition 2.1

Sætning 2.2: Lad $\tilde{m}_{ij}$ (og henholdsvis $\tilde{k}_{ij}$) være det j 'te diagonalkomponent i $\tilde{M}$ (og henholdsvis $\tilde{K}$). Så gælder det at

$$\phi_j^T M \phi_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \tilde{m}_{ij}, & i = j \end{cases}$$

Og

$$\phi_j^T K \phi_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \tilde{k}_{ij}, & i = j \end{cases}$$

Bevis:

Vi har

$$K \phi_i = \omega_i^2 M \phi_i \quad (2.2a)$$

Og

$$K\phi_j = \omega_j^2 M\phi_j \quad (2.2b)$$

Vi pre-multipliserer (2.2a) med ϕ_j^T og (2.2b) med ϕ_i^T hvorved

$$\phi_j^T K\phi_i = \omega_i^2 \phi_j^T M\phi_i \quad (2.3a)$$

Og

$$\phi_i^T K\phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T M\phi_j \quad (2.3b)$$

Vi transponerer (2.3b) hvorved

$$\phi_j^T K\phi_i = \omega_j^2 \phi_j^T M\phi_i \quad (2.4)$$

Vi trækker (2.4) fra (2.3a) hvorved

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \phi_j^T M\phi_i$$

Da det skal gælde i alle tilfælde, kan det inde i parantesen ikke give 0. Vi ser at

$$\phi_j^T M\phi_i = 0 \text{ for } i \neq j$$

Kigger vi på eksempelvis 2.3a, så ser vi

$$\phi_j^T K\phi_i = 0 \text{ for } i \neq j$$

Bevis slut.

Ud fra beviset har vi altså nu at

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_{jj} \end{bmatrix}$$

Og

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_{jj} \end{bmatrix}$$

Definition 2.2:

Egenvektorerne $\phi_j \in R^n$, er massenormaliserede såfremt $\tilde{M} = I$

Følgesætning 2.1:

Hvis vi har massenormaliserede egenvektorer (altså $\tilde{M} = I$), så gælder det at $\tilde{K} = \Lambda$

Implementering af dæmpning

Bevægelsesligningen bliver så

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (3.1)$$

Definition 3.1: Den modale dæmpningsmatrice er givet som

$$\tilde{C} = \Phi^T C \Phi \quad (3.2)$$

Definition 2.2: Dæmpning er klassisk, såfremt $\tilde{C}$ er diagonal.

Sætning 3.1: (relaterer sig til den frivillige opgave)

En tiltrækkelig betingelse for at $\tilde{C}$ er diagonal at. Fuck det.