Noter fra timen - Tvungen svingningen af LTI MDOF system

12. november 2024 12:15

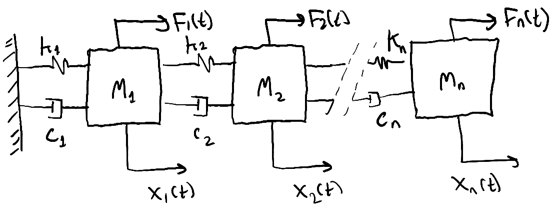
Bemærkninger og definitioner

Indholdsfortegnelse

1. Introduktion til tvungen svingning af LTI-MDOF system

Vi betragter et LTI-MDOF system med n DOF, der tilføres lasterne $\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_3(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

En skitse af sådan et system kunne eksempelvis se således ud:



Systemet har bevægelsesligningssystemet:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (1.1)$$

Løsningen til (1.1) er givet ved en superposition af den homogene del og den partikulære del

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (1.2)$$

Hvor x_h er den homogene løsning, og x_p er den partiukære løsning

Metoder til løsning af (1.1)
- Modaldekobling (både x_h og x_p)
- Duhamelsintegrale (kun bestemmelse af x_p)
- Fouriertransformation (typisk kun til x_p)
- Tidsintegration (kommer vi til næste gang) (både x_h og x_p - dog i diskret tid)

Bemærkning 1.1
- Vores modaldekoblingsformulering hviler på antagelsen om en klassisk dæmpning
- De andre listede løsningsmetoder hvilker <u>ikke</u> på de antagelser.

2. Modaldekobling som løsningsprocedure

Løsning af det generelle problem

Vi husker modaltransformationen

$$x(t) = \Phi q(t) \quad (2.1)$$

Hvor vores modalmatrice er $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og $q(t) \in \mathbb{R}^n$ er en vektor der indeholder vores modalkoordinater. Modal henviser til egensvingningskonfigurationer.

Vi indsætter (2.1) i (1.1) og premultiplicerer med Φ^T

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \Phi^T K \Phi q(t) = \Phi^T F(t)$$

Vi ser vi har vores modale masse, stivheds og dæmpningsmatricer

$$\widetilde{M}\ddot{q}(t) + \tilde{C}\dot{q}(t) + \widetilde{K}q(t) = \Phi^T F(t)$$

Vi kigger på højre siden og lader

$$\tilde{F}(t) \equiv \Phi^T F(t) = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \dots \\ \phi_n^T \end{bmatrix} F(t) = \begin{bmatrix} \widetilde{F_1}(t) \\ \widetilde{F_2}(t) \\ \dots \\ \widetilde{F}_n(t) \end{bmatrix}$$

Hermed får vi

$$\widetilde{M}\ddot{q}(t) + \tilde{C}\dot{q}(t) + \widetilde{K}q(t) = \tilde{F}(t) \quad (2.2)$$

Vi antager klassisk dæmpnings, således

$\forall \in [1, n]$: $\tilde{m}_{jj}\ddot{q}_j(t) + \tilde{c}_{jj}\dot{q}_j(t) + \tilde{k}_{jj}q_j(t) = \tilde{F}_j(t)$	(2.3)

Hvor indeks j indikerer den $j'te$ egensvingnignsform

Vi løser 2.3 for den homogene, og den partikulære, sætte dem sammen, og så transformere tilbage. Løsningen til (2.3) er

$$q_j(t) = q_{h_j}(t) + q_{p_j}$$

Når vi har alle q_j samler vi dem i vores vektor $q(t)$ og retunerer til (2.1)

Implementering af begyndelsesbetingelser

Vi har af (2.1) at

$$x_0 = \Phi q_0$$

Og

$$\dot{x}_0 = \Phi \dot{q}_0$$

Hvoraf vi får

$q_0 = \Phi^{-1}x_0$	(2.4a)

Og

$\dot{q}_0 = \Phi^{-1}\dot{x}_0$	(2.4b)

Vi antager at vores egenvektorer er massenormaliserede, hvorved

$$\tilde{M} = \Phi^T M \Phi = I$$

Hermed kan vi skrive

$$\Phi^{-1} = \Phi^T M$$

Så i tilfælde af massenormaliserede egenvetkroer, så har vi

$q_0 = \Phi^T M x_0$	(2.5a) - Massenormaliserede egenvektorer

Og

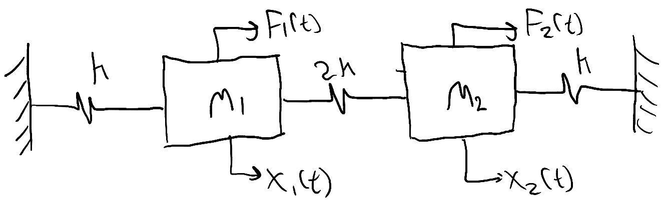
$\dot{q}_0 = \Phi^T M \dot{x}_0$	(2.5a) - Massenormaliserede egenvektorer

Så vores prodedure for løsning
- Antag klassisk dæmpning
- Dekobel (1.1) vha. (2.1)
- Løs (2.3) for den homomgene del for alle j via begyndelsesbetingelser (2.4 el 2.5) (Procedure er den samme som for SDOF)
- Når vi har den homogene, finder vi også den partikulære for alle j (Procedure er den samme som for SDOF)
- Indsætte alle vores $q_j(t)$ i vores vektor $q(t)$
- Gå tilbage til ikke modale koordinater vha. (2.1)

Modaltrunkering
Vi lader $S \subseteq \{1,2, \dots n\}$ (altså vi lader S være en delmængde af vores samlede frihedsgrader, således

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j q_j(t) \approx \sum_{j \in S} \phi_j q_j(t)$$

Eksempel 2.1



$$\begin{array}{ccc} & \omega_1 & \omega_2 \\ & \phi_1 & \phi_2 \end{array}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \omega_2 \geq \omega_1$$

Vi antager $x_0 = \dot{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, hvorved $q_0 = \dot{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Det oplyses at $F(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t)$.

Vi Regner

$$\tilde{F}(t) = \Phi^T f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{F}_1(t) = 2F_0\cos(\Omega t) \\ \tilde{F}_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(t) = 2F_0\cos(\Omega t) \\ F_2(t) = 0 \end{cases}$$

Vi får ligningerne

$$\begin{cases} \tilde{m}_{11}\ddot{q}_1(t) + \tilde{c}_{11}\dot{q}_1(t) + \tilde{k}_{11}q_1(t) = 2F_0\cos(\Omega t) \\ \tilde{m}_{22}\ddot{q}_2(t) + \tilde{c}_{22}\dot{q}_2(t) + \tilde{k}_{22}q_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \; q_2 = \dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0$$

Så her kan vi trunkere med $S = \{1\}$

$$\Rightarrow X(t) = \sum_{S \in \{1\}} \phi_j q_j(t) = \phi_1 q_1(t)$$

3. Fouriertransformation som løsningsprocedure

Lad $\omega \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ og lad

$X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$

Dog da der ikke sker noget før 0, kan vi sige

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{3.1}$$

Hvor $X(\omega)$ er vores flytningsvektor i frekvensdomænet

Af (3.1) får vi

$$\dot{X}(\omega) = \mathcal{F}(\dot{x}(t))(\omega) = \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-i\omega t}dt = \left[x(t)e^{-i\omega t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}dt = \left[x(t)e^{i\omega t}\right]_0^{\infty} + i\omega\int_0^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

Vi ser den sidste del er lig vores flytningsvektor i frekvensdomænet, og får

$$\dot{X}(\omega) = -x_0 + i\omega X(\omega) \tag{3.2}$$

Vi forstætter, for nu at finde accelerationsvektor

$$\ddot{X}(\omega) = \mathcal{F}(\ddot{x}(t))(\omega) = \int_0^{\infty} \ddot{x}(t)e^{-i\omega t}dt = \left[\dot{x}(t)e^{-i\omega t}\right]_0^{\infty} + i\omega\int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-i\omega t}dt = -\dot{x}_0 + i\omega\left(-x_0 + i\omega X(\omega)\right)$$

Så vi ender med

$$\ddot{X}(\omega) = -\dot{x}_0 - i\omega x_0 - \omega^2 X(\omega) \tag{3.3}$$

Vores kraft i frekvensdomænet er blot fourier transformationen af den eksterne last (fourier transformationen med hensyn til ω)

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega) \tag{3.4}$$

Hvoraf fås (1.1) i frekvensdomænet som

$$M(\dot{x}_0 - i\omega x_0 - \omega^2 X(\omega)) + C(-x_0 + i\omega X(\omega)) + KX(\omega) = F(\omega) \tag{3.5}$$

Vi lader $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, så finder vi den partikulære løsning, hvormed

$$(-M\omega^2 + Ci\omega + K)X(\omega) = F(\omega) \tag{3.6}$$

Her betegnes $(-M\omega^2 + Ci\omega + K)$ den dynamiske stivhedsmatrice

Lad

$$H(\omega) = (-M\omega^2 + Ci\omega + K)^{-1}$$

Alternativt kan det skrives

$$H(\omega) = \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - \frac{c\omega i}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

Heraf bliver

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

Ydermere har vi argumentet

$$\arg(H(\omega)) = \arctan\left(-\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

(Det er fasevinklen)

I tilfælde af at $\omega = \Omega$, så har vi (OG KUN VED HARMONISKE LASTER) (du ved når vi har $F(t) = F_0 \cos(\Omega t - \gamma)$

$|H(\Omega)| = \frac{B}{F_0}$ (se lection 4 for B)(Her menes absolut værdi ikke determinanten)

Og

$$\arg(H(\Omega)) = -\gamma = -\psi$$

RET SIKKER PÅ EN HER FORMEL FAKTISK SKAL VÆRE

=> $\arg(H(\Omega) \cdot F_0) = -\gamma = -\psi$

Mere generelt har vi

$X(\omega) = H(\omega)F(\omega)$	(3.7)

Hvor $H(\omega)$ er den dynamiske fleksibilitets matrice. Mere generelt betegnes $H(\omega)$ for frekvensresponsmatricen

Vi har $H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & \dots & H_{1n}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & \dots & H_{nn}(\omega) \end{bmatrix}$

Hvor $H_{ij}(\omega)$ er en frekvensresponsfunktion

Eksempel 3.1
Lad $n = 1$ hvormed

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ci\omega + k} = \frac{1}{k - m\omega^2 + ci\omega} = \frac{k - m\omega^2 - ci\omega}{k - m\omega^2 - ci\omega} \cdot \frac{1}{k - m\omega^2 + ci\omega}$$

Han udleder et algebraisk helvede på tavlen, kommer frem til at

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

Vi husker, at for et SDOF-system, der belastet med $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$,får vi

$$x_p(t) = B\cos(\Omega t - \psi)$$

Med $B = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}$

Slut

Observation 3.1

Vi ser at $H_{ij}(\omega)$ er lig flytningsresponset (i frekvensdomænet) i DOF i induceret af en harmonisk last med amplitude 1 og frekvens omega i DOF j

Det er værde at bemærke, at fourier transformationen IKKE afhænger af klasisk dæmpning

Vi kan omskrive vores frekvensresponsmatrice

$$H(\omega) = \left(-(\Phi^T)^{-1}\tilde{M}\Phi^{-1}\omega^2 + (\Phi^T)^{-1}\tilde{C}\Phi^{-1}i\omega + (\Phi^T)^{-1}\tilde{K}\Phi^{-1}\right)^{-1}$$

Bliver til

$$H(\omega) = \Phi\left(\tilde{M}\omega^2 + \tilde{C}i\omega + \tilde{K}\right)^{-1}\Phi^T$$

Og hvis vi har klasiisk dæmpning, så fås

$$H(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\phi_j \cdot \phi_j^T}{-\tilde{m}\omega^2 + \tilde{c}_{jj}i\omega + \tilde{k}_{jj}}$$

Så vi får under antagelse af klasiisk dæmpning, at

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\phi_j \cdot \phi_j^T}{-\tilde{m}\omega^2 + \tilde{c}_{jj}i\omega + \tilde{k}_{jj}} F(\omega)$$

Hvilket kan skrives videre som

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\phi_j \cdot \tilde{F}_j(\omega)}{-\tilde{m}\omega^2 + \tilde{c}_{jj}i\omega + \tilde{k}_{jj}}$$

Ved at lade $Q_j(\omega) = \frac{\tilde{F}_j(\omega)}{-\tilde{m}\omega^2 + \tilde{c}_{jj}i\omega + \tilde{k}_{jj}}$

Så får vi altså

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j Q_j(\omega)$$